Asiantuntijatiedon kvantifiointi riskinarvioinnissa

EELA

ASIANTUNTIJATIEDON KVANTIFIOINTI RISKINARVIOINNISSA

Mervi Eerola

EELA, Riskinarvioinnin tutkimusyksikkö

Rolf Nevanlinna instituutti, Helsingin yliopisto

1 Johdanto

Asiantuntijatietoa tarvitaan silloin kun käsillä ei ole mitattua tietoa tai sitä ei ole edes periaatteessa mahdollista vielä ollakaan, kuten ennustettaessa. Esimerkkejä tällaisistä tilanteista on helppo löytää: ydinvoimalan toiminta, lentoturvallisuus, vaarallisten tartuntatautien ehkäisy väestössä jne. Riskinarviointi tarkoittaa silloin systeemin toiminnan perinpohjaista selvittämistä ja mahdollisten uhkatekijöiden todennäköisyyden arviointia.

Epävarmuus voidaan laajasti ottaen tulkita sattuman aiheuttamaksi kohtaloksi, johon tietyssä määrin on pakko sopeutua. On kuitenkin selvää, että näin ei voida ajatella sellaisten systeemien suhteen, joiden romahtaminen aiheuttaa mittaamattoman suuria katastrofeja. On siis löydettävä tapoja ennakoida tulevia riskejä ja keinoja niiden hallitsemiseksi. Tilastotiede tutkii ja kehittää menetelmiä tilanteisiin, joihin liittyy päätöksentekoa epävarmuuden vallitessa. Sen perusteet ovat todennäköisyyslaskennassa ja todennäköisyys on tapa *kvantifioida* epävarmuutta. Todennäköisyyden tulkitseminen subjektiivisen informaation puutteeksi, kuten bayesiläinen tilastotieteen koulukunta tekee, tarjoaa varsin luontevan perustan epävarmuuden arviointiin silloin kun ei edes periaatteessa voida ajatella tehtävän toistokokeita. Todennäköisyyslaskennan lait tarjoavat normatiivisen tavan päivittää *tietämystä* ilmiöstä, kun siitä opitaan lisää tai saadaan havaintoja. Termi tietämys, toisin kuin tieto, kuvastaneekin paremmin tilanteita, joissa ymmärtämys on sekä mitattua tietoa että ihmisten kokemusperäistä asiantuntemusta. Riskinarviointi voidaan ajatella tehtävänä, jossa tietämys syntyy monen tiedonpalasen yhdistämisen tuloksena ja keinot, joilla yhdistämistä tehdään, ovat olennainen osa riskinarvionnin menetelmällistä kehitystyötä.

Tässä työssä esitetään sekä teoreettisia että empiirisiä tuloksia asiantuntijatiedon käytöstä riskinarvioinnissa ja yleisesti epävarmuuden ennakoinnissa. Alan kirjallisuus on erittäin laajaa, monitieteistä ja heterogeenistä. Se voidaan kuitenkin luokitella kolmeen pääosaan: psykologiseen ja päätöksentekoteoreettiseen kirjallisuuteen ihmisen tavasta käsitellä todennäköisyyksiä epävarmuuden mittarina, tilastotieteelliseen kehitystyöhön tietämyksen päivittämisestä todennäköisyyksien avulla (bayesiläinen informaation prosessointi) sekä joukkoon tapausselostuksia asiantuntijatiedon käytöstä eri tilanteissa. Samaa jaottelua on käytetty myös tämän työn organisoinnissa. Toisessa luvussa esitellään vaikeuksia, joita ihmisillä on hahmottaa epävarmuutta todennäköisyyksien avulla. Näiden harhan lähteiden tiedostaminen on arvioinnin suunnittelun kannalta keskeistä. Asiantuntija-arvioiden keräämisestä käytetään englanninkielessä termiä *elicitation* (suom. 'houkutella esiin'), joka kuvaa hyvin arvioinnin suunnittelijan tehtävää: hänen on pystyttävä houkuttelemaan esiin asiantuntijoiden todellinen tietämys arvioitavasta ilmiöstä. Inhimillinen tapa sekoittaa intuitiota, omaa muistivarantoa, kokemusperäistä tietoa ja yleisiä käsityksiä asettavat todellisen haasteen arvioinnin suunnittelulle. Arviointiprosessin luonne sosiaalisena tilanteena erilaisine vaikutussuhteineen tulisi myös vaikuttaa suunnitteluun.

Kolmannessa luvussa esitellään bayesiläinen informaation prosessoinnin keskeisiä tuloksia siitä, miten asiantuntija-arvioita voidaan käsitellä 'datana' ja näin käyttää Bayesin kaavan tarjoamaa normatiivista tapaa päivittää tietämystä. Neljännessa luvussa kuvataan vaiheita, joita huolellisesti suunnitellun arviointiprosessin tulisi sisältää, sekä esitellään tuloksia siitä, miten ilmiön epävarmuusjakaumaa voitaisiin parhaiten arvioida ja miten sitä koskevia tietoja tulisi kysyä asiantuntijoilta. Tämän jälkeen esitellään tapausselostuksia kliinisten kokeiden suunnittelussa ja harvinaisten, moniulotteisten ongelmien riskinarvioinnissa. Yhteenvedossa pohditaan arviointiprosessiin liittyviä ongelmia tiedontuottamisen kannalta.

2 Psykologisia seikkoja epävarmuuden arvioinnissa

Ihminen törmää epävarmuuteen päivittäisissä tilanteissaan. Ehkä juuri siksi epävarmuuden arviointi sisältää runsaasti intuitiivisia käsittelykeinoja, jotka vaikuttavat myös strukturoiduissa asiantuntija-arvioinneissa. Informaation prosessointia käsittelevät teoriat ovat idealistisia käsityksiä siitä, miten rationaalinen ihminen päivittää todennäköisyyttään saamansa evidenssin perusteella. Ne osoittavat, mitä ehtoja subjektiivisten todennäköisyyksien on täytettävä, jotta ne ylipäätään voitaisiin tulkita todennäköisyyksiksi. On kuitenkin tunnettua, että ihmiset pystyvät varsin huonosti arvioimaan todennäköisyyksiä eivätkä myöskään päivitä niitä Bayesin kaavan mukaisesti vaan muuttavat priori käsityksiään konservatiivisemmin kuin Bayesin kaava siinä tilanteessa edellyttäisi. Seuraavassa esitellään muutamia ongelmia, joita todennäköisyyksien arvioinnissa on havaittu. Esitys perustuu pääsääntöisesti lähteisiin Tversky (1974) ja Hogarth (1987).

Esiintymistiheys. Epävarmuutta koskevat kysymykset ovat usein muotoa: miten todennäköistä on, että prosessi A tuottaa tapahtuman B tai mikä on todennäköisyys sille, että toteutunut tapahtuma B on seurausta prosessista A? Ihmiset prosessoivat tällaisia kysymyksiä usein intuitiivisesti vertaamalla A:n ja B:n olennaisia piirteitä. Mikäli ne heidän mielikuvissaan liittyvät yhteen ja ovat samanlaisia, arvioidaan todennäköisyys suureksi riippumatta siitä, mikä ilmiöiden esiintymistodennäköisyys väestötasolla on. Todennäköisyys siis rinnastetaan samanlaisuuteen. Tversky (1974) raportoi tutkimuksesta, jossa koehenkilöitä pyydettiin arvioimaan tiettyjen ammattien ja luonteenpiirteiden todennäköisyyksiä. Ihmisten vahvat mielikuvat ja stereotyyppiset käsitykset eri ammattien edustajista heijastuivat varsin epärealistisina arvioina luonteenpiirteiden yleisyyksistä. Tämä prioritodennäköisyyksien huomiotta jättäminen johtaa usein siihen, että väestössä harvinaiset tapahtumat saavat paljon suuremman todennäköisyyden liitettynä toisiin tapahtumiin, jotka ihmisten mielissä niihin läheisesti liittyvät.

Siksi olisikin tärkeätä pyrkiä esittämään kysymykset siinä järjestyksessä, että *kokonaistodennäköisyyden* logiikka käy ilmeiseksi. Tällöin ei siis kysytä tapahtuman A todennäköisyyttä suoraan vaan marginaalisten ja ehdollisten todennäköisyyksien kautta. Tapahtuman A kokonaistodennäköisyys ehdolla vaihtoehdot B_i saadaan kaavasta

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

Esimerkki. Tarkastellaan seuraavassa yksinkertaista esimerkkiä, miten tällaisia todennäköisyyksiä voidaan arvioida. Ehdollistavia tapahtumia B on vain yksi eli $i = 1$. Halutaan todennäköisyysarvio jonkin tapahtuman toteutumiselle, kuten: Tapahtuuko paranemista vai ei? Havaitaanko tautitapaus vai ei? jne. Tällöin kiinnostava parametri on p, toteutumien osuus tutkittavassa populaatiossa, jonka arvo on estimaatti tapahtumatodennäköisyydelle. Vastaavasti arvo $1 - p$ on estimaatti todennäköisyydelle, että tapahtuma ei toteudu. Oletetaan, että n:n suuruisessa otoksessa havaitaan s tapausta ja $f = n - s$ ei-tapausta. Jos oletetaan havainnot riippumattomiksi ehdolla p, on koko otoksen informaatio tapahtuman ten jakaumien avulla. Palataan esimerkkiin teurastamon imusolmukenäytteistä. Oletimme aluksi, että ensimmäinen viidestä näytteestä oli positiivinen. Oletetaan nyt, että kaksi seuraavaa olivat negatiivisia. Päivitetty jakauma on silloin Beta(1.0231,2.4385). Sitä käyttäen voimme laskea prediktion sille, että neljäs ja viideskin havainto ovat negatiivisia

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta} \times \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1} = 0.584 \times 0.704 = 0.412$$

Jos olisi syytä harkita sitä, kannattaako tässä tilanteessa kerätä vielä lisää näytteitä, olisi seuraavan positiivisen näytteen todennäköisyys 0.187. Jos taas ensimmäinen näyte olisi ollut negatiivinen, olisi viiden negatiivisen näytteen todennäköisyys ollut 0.626.

Subjektiivisen epävarmuusjakauman ongelmat. Subjektiivinen epävarmuusjakauma mittaa asiantuntijan kokonaiskäsitystä ilmiön epävarmuudesta. Koska todennäköisyysjakaumien hahmottaminen on yleensä osoittautunut liian vaikeaksi, subjektiivinen todennäköisyysjakauma muodostetaan yleensä kysymällä asiantuntijalta tiettyjä jakauman persentiilejä (esim. 10%, 25%, 50%, 75%, 90%). Kulttuureissa, jossa vedonlyöntisuhteiden ajattelutapa on luontevaa, kuten Englannissa, voidaan kysymys ilmiön X jakauman 90% persentiilistä esittää muodossa: Mikä on luku, josta olisit valmis lyömään vetoa 9:1, että X:n todellinen arvo ei ylitä tätä lukua? Asiantuntijan siis tulisi olla vakuuttunut siitä, että yhdeksässä tapauksessa kymmenestä ilmiön todellinen arvo jää alle tämän arvon $X_{0.9}$. Vastaavasti, yhdeksässä tapauksessa kymmenestä todellisen arvon tulisi olla suurempi kuin hänen arvionsa $X_{0.1}$. Saman henkilön todennäköisyysarvioita voidaan *kalibroida* kysymällä vastaavanlaisia arvioita useista eri ilmiöistä.

On kuitenkin havaittu (esim. Winkler 1968), että epävarmuusjakaumiin liittyy huomattavia ja systemaattisia poikkeamia kalibroinnista. On tyypillistä, että luottamusvälit ovat liian kapeita verrattuna asiantuntijan itse kokemaan ja ilmoittamaan varmuuteen ilmiön käyttäytymisestä. Koska tämä pätee sekä niihin asiantuntijoihin, joilla on kokemusta todennäköisyyksistä että niihin, joilla ei ole, on sen arveltu liittyvän alkuarvon ankkurointiin.

Epävarmuusjakauman muodostamisessa on yleensä joko pyydetty asiantuntijan arvioita tietyistä jakauman persentiileistä tai hänen arviotaan todennäköisyydestä, että ilmiö ylittää jonkin ennaltamäärätyn arvon. Molemmat johtavat teoriassa samaan lopputulokseen, mutta ne kuvaavat eri tapoja irrottautua subjektiivisesta alkuarvosta ankkurina. Ensimmäisessä luonnollinen aloitusarvo on asiantuntijan oma paras arvio. Toisessa vastaukset annetaan todennäköisyyksinä ja luonnollinen lähtökohta on mediaani; keskiluku, jonka molemmilla puolilla on yhtä paljon todennäköisyyttä. Jälkimmäinen menetelmä yksinään tuottaa usein liian laakeita todennäköisyysjakaumia, joten molempien menetelmien käyttö yhdessä saattaisi olla paras ratkaisu.

Yhteenveto. Suurimpana ongelmana epävarmuuden arvioinnissa pidetään ihmisten tottumattomuutta ajatella johdonmukaisesti todennäköisyyksien ja todennäköisyysjakaumien avulla. Koska monet kirjallisuudessa raportoiduista kokeista on tehty tilastotieteen opiskelijoille, on oletettavaa, että ongelmia ei ole yliarvioitu. Epävarmuuden ilmaiseminen puhtaasti kvalitatiivisin termein osoittaa, että ihmiset antavat hyvin erilaisia tulkintoja sanoille kuten 'odotettavissa oleva' tai 'mahdollinen' jne. (Hogarth, 1987). Todennäköisyyden avulla epävarmuus voidaan kvantifioida täsmällisesti. Tämän lisäksi todennäköisyyslaskenta tarjoaa selvät säännöt sille, miten yksinkertaisten tapahtumien todennäköisyyksistä muodostetaan monimutkaisempien tapahtumien todennäköisyyksiä, joista riskinarvioinnissa useimmiten on kyse. Subjektiivisen todennäköisyyskäsityksen mukaan henkilöillä (asiantuntijoilla) voi olla erilaisia käsityksiä saman ilmiön epävarmuudesta, mutta saman henkilön käsitysten on oltava sisäisesti konsistentteja ja noudatettava todennäköisyyslaskennan lakeja. Käytännössä nämä ilmenevät juuri edelläkuvattujen kalibrointiperiaatteiden toteutumisena.

3 Asiantuntijatiedon mallittaminen bayesiläisen informaation prosessoinnin avulla

Tarkastellaan seuraavassa miten usean asiantuntijan arvioita yhdistämällä voidaan päivittää päätöksentekijän omaa käsitystä ilmiöstä. Tässä työssä rajoitutaan *bayesiläisen informaation prosessoinnin* esittelyyn; muita tapoja prosessoida asiantuntija-arvioita esitellään esimerkiksi artikkelissa Genest ja Zidak (1986). Perusajatukset bayesiläisestä informaation prosessoinnista juontavat artikkeleihin Winkler (1968) ja Morris (1974). French (1981) sekä sarja Lindleyn papereita (1983, 1985, 1988) esittävät matemaattisen perustan diskreettien ilmiöiden ja West (1988) ja Gelfand et al. (1995) yleistävät ne reaaliarvoisten muuttujien todennäköisyys- tai kvantiilijakaumille.

Asetelma on seuraava: merkitään seuraavassa ilmiötä, jonka epävarmuudesta halutaan asiantuntija-arvioita, yleisesti Y:llä. Tarkastellaan tilannetta, jossa päätöksentekijällä itsellään (elicitor, decision maker, 'supra-Bayesian') on priori käsitys ilmiön Y todennäköisyydestä, jota hän päivittää asiantuntija-arvioiden avulla. Ne muodostavat siis 'datan' vaikka muodollisesti ovatkin todennäköisyyksiä tai malliin liittyviä parametriarvoja. Jotta asiantuntija-arvioita voitaisiin prosessoida datana tavanomaisin bayesiläisin päivityskeinoin, on arvio muodostettava kaikille Y:n mahdollisille arvoille.

Yleisessä muodossa ongelma voidaan esittää seuraavasti: jos käytössä on k:n asiantuntijan arvio n:n toisensa poissulkevan tapahtuman $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ todennäköisyydestä, niin päätöksentekijän tulisi päivittää omaa prioritodennäköisyyttään $p(Y_j|H)$ tapahtumasta Y_j saatuaan oman informaationsa H lisäksi asiantuntija-arviot $Q = \{Q_{ij}\}, i = 1, ..., k, j = 1, ..., n$ Bayesin kaavan mukaisesti siten, että tapahtuman Y_j posterioritodennäköisyys on verrannollinen hänen prioritodennäköisyytensä ja asiantuntija-arvioiden ennusteiden tuloon

$$p(Y_j|Q, H) \propto p(Q|Y_j, H)p(Y_j|H).$$

Termi $p(Q|Y_j, H)$ on asiantuntija-arvioiden likelihood eli uskottavuusfunktio Y:n todellisten arvojen suhteen. Se kuvaa päätöksentekijän omaa käsitystä asiantuntija-arvioiden uskottavuudesta. Mikäli päätöksentekijä pitää asiantuntijan i arviota erittäin uskottavana, tulisi q_{ij}:n ehdollisen todennäköisyyden olla suuri jos Y_j toteutuu ja päinvastoin. Bayesin kaava antaa normatiivisen menettelytavan siitä, miten päätöksentekijä koherentisti muuttaa käsitystään ilmiöstä saadessaan lisäinformaatiota asiantuntija-arvioiden kautta.

Alan kirjallisuus keskittyy tarkoituksenmukaisten mallien kehittämiseen tilanteissa, joissa satunnaisuure Y on joko diskreetti tai jatkuva ja jossa Y:n vaihtelu esitetään koko sen jakauman avulla tai tiettyjen tunnuslukujen, kuten mediaanin ja hajonnan, tai valikoitujen jakauman kvantiilien avulla. Jälkimmäiset tapaukset kuvaavat osittaista tietoa ilmiön epävarmuudesta. Todellisuudessa Y:n jakaumaa on yleensä mahdotonta arvioida kokonaisuudessaan, mutta sen approksimointi riittävän monen kvantiilipisteen avulla on osoittautunut realistiseksi ja on asiantuntijoiden hyväksyttävissä. Tarkastellaan seuraavassa yksinkertaisinta, mutta varsin yleistä tilannetta, jossa kiinnostava ilmiö voidaan tulkita tapahtumaksi, jolloin Y saa vain arvot 0 ja 1. Seuraavat tulokset perustuvat pääsääntöisesti Westin (1988) artikkeliin.

3.1 Tapahtuman epävarmuusjakauman approksimointi

Oletetaan, että päätöksentekijän prioritodennäköisyys tapahtumalle on p eli $P(Y = 1) = p$. Merkitään asiantuntijan todennäköisyyttä f:llä ja sen tarjoamaa lisäinformaatiota $H = \{f\}$. Tässä tapauksessa epävarmuusjakauman konstruointi on melko yksinkertaista, koska Y saa vain kaksi arvoa, 0 tai 1. Lindley (1988) tarkastelee Y:n logistista normaalijakaumaa, West (1988) sen sijaan ehdottaa epävarmuusjakaumaksi Beta-jakaumaa

$$(f|Y) \sim Beta(\delta\alpha_Y, \delta(1-\alpha_Y)),$$

jossa δ on tarkkuusparametri, joka ei riipu Y:stä. Funktio $\alpha_Y = E(f|Y)$ on päätöksentekijän odotusarvo asiantuntija-arvion harhaisuudelle ehdolla Y:n todellinen arvo. Tulkinta on seuraava: jos päätöksentekijä arvioi asiantuntijan käsityksen realistiseksi niin $\alpha_1 > \alpha_0$ ja asiantuntijuus 'kasvaa' kun $\alpha_1 - \alpha_0$ kasvaa.

Tässä tapauksessa epävarmuusjakauma on siis muotoa

$$p(f|Y) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta\alpha_Y)\Gamma(\delta(1-\alpha_Y))} f^{\delta\alpha_Y - 1}(1-f)^{\delta(1-\alpha_Y)-1},$$

kun $0 < f < 1$. Bayesin kaavassa tämä funktio on 'datan' eli asiantuntija-arvion uskottavuusfunktio, jolla päätöksentekijä päivittää omaa prioritodennäköisyyttään posteriori todennäköisyydeksi $p^* = P(Y = 1|H)$. Voidaan helposti laskea, että log odds-asteikolla posterioritodennäköisyys on

$$log(\frac{p^*}{1-p^*}) = log(\frac{p}{1-p}) + k + \delta(\alpha_1 - \alpha_0)log(\frac{f}{1-f})$$

jossa korjaustermi k sisältää parametrit δ, α_1 ja α_0 Gamma-funktioiden kautta.

Päätöksentekijän priori log-oddsia tapahtumalle voidaan siis päivittää termillä, joka on asiantuntijan log-odds termin lineaarinen funktio. Saman tuloksen osoittivat French (1980) ja Lindley (1983) olettaessaan $(f|Y)$ jakauman normaaliseksi. Tällä tuloksella on myös varsin ymmärrettävä tulkinta: jos asiantuntija on täysin epävarma vaihtoehdoista $Y = 0$ tai $Y = 1$ niin hänen ennusteensa on $f = 0.5$. Vaikka tässä tapauksessa viimeinen termi kaavassa (3.1) on 0, niin korjaustermi k vaikuttaa kuitenkin posterioritulokseen paitsi siinä erikoistapauksessa, että $\alpha_1 + \alpha_0 = 1$. Kerroin $\delta(\alpha_1 - \alpha_0)$ voidaan tulkita myös Y:n regressiokertoimeksi f:n suhteen (vrt. Genest ja Shervish, 1985). Jos $\delta(\alpha_1 - \alpha_0) = 1$, niin asiantuntijan ennustejakauma on suoraan uskottavuusfunktio, jolloin $p^* = pf$ ja $(1-p^*) = (1-p)(1-f)$. Jos tässä tapauksessa päätöksentekijä itse on epävarma eli $p = 0.5$, niin hän omaksuu asiantuntijan käsityksen eli $p^* = f$.

Edelläkuvattu tarkastelu mahdollistaa asiantuntija-arvion prosessoinnin myös rajoitetusti. Mikäli asiantuntija katsoo, että voi arvioida ennustejakaumaa ainoastaan jollakin rajoitetulla alueella, esimerkiksi vain välillä $f_l \leq f \leq f_u$, voidaan ennustejakauman arvioinnissa rajoittua tälle välillä integroimalla sen yli

$$p(H|Y) = \int_{f_l}^{f_u} p(f|Y)df.$$

Tämä on kuitenkin mahdollista vain jos syy, miksi asiantuntija ei katso voivansa määritellä jakaumaa näiden rajojen ulkopuolella, ei ole informatiivista rajojen ulkopuolisten arvojen kannalta (ts. sensurointi on epäinformatiivistä). Muussa tapauksessa Y:n arvot rajojen ulkopuolella olisivat hyvin poikkeavia siitä jakaumasta, jota integroimalla arvioidaan.

3.2 Epävarmuusjakauman arviointi kvantiilifunktion avulla

Kaksiarvoisen satunnaismuuttujan Y tarkastelu voidaan yleistää tilanteeseen, jossa Y saa arvoja useammassa luokassa (Lindley, 1985). Jos Y on mielivaltainen, reaaliarvoinen muuttuja, on epävarmuusjakauman muodostaminen tietysti monimutkaisempaa. Vaikka epävarmuusjakauma voitaisiin määritellä vain kahden parametrin avulla, kuten normaalijakauma, on asiantuntijoiden on yleensä vaikea arvioida tällaisia havaitsemattomia, epäkonkreettisia suureita.

Seuraavassa määritellään asiantuntijan epävarmuusjakauma osittain kvantiilifunktion avulla. Oletetaan, että satunnaismuuttuja Y noudattaa jakaumaa F argumenttinaan X ja että F käyttäytyy 'siististi'. Jakauman $F(X)$ sijasta tarkastellaan sen käänteisfunktiota

$$Q(U) = F^{-1}(U),$$

yksikkövälin satunnaismuuttujan U, $0 \leq U \leq 1$ funktiona. Tätä funktiota kutsutaan *kvantiilifunktioksi*. Se sisältää saman informaation ilmiön satunnaisuudesta kuin F, mutta kvantiilipisteiden avulla voidaan määritellä F vain osittain. Luonnollinen lähtökohta on $Q(0.5)$, joka on jakauman F mediaani eli sellainen piste, jonka molemminpuolin epävarmuutta on yhtä paljon. Merkitään mediaania $\mu = Q(0.5)$.

Tehtävänä on määritellä mediaanin ehdollinen jakauma $p(\mu|Y)$ ehdolla Y:n todellinen arvo. Merkitään funktiota, joka kuvaa päätöksentekijän odotusarvoa asiantuntijan mediaaniarvion harhaisuudesta ehdolla Y:n todellinen arvo, seuraavasti

$$M_Y(X), \ -\infty < X < \infty.$$

Funktion rooli on siis sama kuin α_Y:llä aikaisemmin: se kuvaa asiantuntijan mediaaniarvion harhaa ja kalibroinnin puutteellisuutta.

Esimerkki. Olkoon $X|Y \sim N(Y + c, W)$, jolloin $\mu - Y \sim N(c, W)$ eli c on asiantuntija-arvion harha. Asiantuntija on *harhaton mediaanin suhteen* jos $c = 0$. Tällöin jakauman $p(\mu|Y)$ odotusarvo on Y:n oikea arvo.

Jos oletetaan, että mediaani μ noudattaa jakaumaa $M_Y(\mu)$ ehdolla Y, niin

$$\mu = Q(0.5) = M_Y^{-1}(\pi),$$

jossa π on tasajakautunut satunnaismuuttuja eli $\pi \sim U(0,1)$. Edellisessä esimerkissä M_Y oli normaalijakauma, joten $\mu = c+Y+W^{1/2}\Phi^{-1}(\pi)$, jossa $\Phi()$ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio. Koska tulos tietysti riippuu valitusta jakaumasta M_Y, on West (1988) ehdottanut, että π noudattaa tasajakauman sijasta jotain yleisempää jakaumaa, kuten

$$\pi \sim Beta(\delta/2, \delta/2),$$

tarkkuusparametrilla δ, joka ei riipu Y:sta. Tällöin $\pi = M_Y(\mu) = M_Y[Q(0.5)]$ on yksikkövälillä määritellyn *yhdistetyn* jakauman $M_Y[Q(U)]$ arvo pisteessä $U = 0.5$. Jakauman $p(\mu|Y)$ sijainti määräytyy edelleen M_Y:n perusteella koska $E(\pi) = 0.5$ kaikilla parametrin δ arvoilla, mutta sen hajonnan suuruus M_Y:n hajontaan verrattuna riippuu siitä onko $\delta > 2$.

Tarkastellaan seuraavassa mielivaltaista kvantiilijakauman pistettä

$$q = Q(U), \; 0 \le U \le 1.$$

Jos tarkasteltava kvantiilipiste on suurempi kuin mediaani, on $U > \mu$ ja

$$q = M^{-1}(\theta),$$

mielivaltaiselle θ, jolle pätee $\pi < \theta \le 1$. Yleistyksenä mediaanin tapauksesta saadaan

$$\theta \sim Beta(\delta U, \delta(1-U)),$$

kaikille $0 \le U \le 1$. Tämä Beta-jakauman parametrointi sallii θ:n satunnaisvaihtelun pisteen U ympäristössä.

Tarkastellaan seuraavassa muunnosta kvantiileista luokkatodennäköisyyksiin $\underline{q}_n \to \underline{\pi}_n$ ja johdetaan kvantiilien jakauma luokkatodennäköisyyksien jakaumasta M_Y:n funktiona.

Määritellään käsitteet:
a) Kiinteät luvut $\underline{U}_n = (U_1, ..., U_{n-1})$ määrittelevät yksikkövälin $[0,1]$ jaon siten, että $0 = U_0 < U_1 < ... < U_n = 1$.

b) Jakoja vastaavat asiantuntijajakauman kvantiilit $q_j = Q(U_j), j = 0, ..., n$, joille pätee $-\infty = q_0 < q_1 < ... q_{n-1} < q_n = \infty$. Olkoon $\underline{q}_n = (q_1, ..., q_{n-1})$.

c) Kiinteätä Y:n arvoa vastaavat luokkatodennäköisyydet $\underline{\pi}_n = (\pi_1, ..., \pi_{n-1})$, jotka ovat muotoa

$$\pi_j = M_Y(q_j) - M_Y(q_{j-1}), \; j = 1, ..., n-1$$

ja $\pi_n = 1 - (\pi_1 + ... + \pi_{n-1})$. Funktion M_Y määritelmästä seuraa, että luokkatodennäköisyydet ovat satunnaisia ja riippuvat Y:n arvoista. Ne sijoittavat yksikkövälillä todennäköisyysmassaa väleille (U_{j-1}, U_j) todennäköisyysjakauman $M_Y(Q(U))$ mukaisesti.

Olkoon $\underline{a}_n = (1/n, ..., 1/n)$ n-pituinen vektori. Luokkatodennäköisyydet $\underline{\pi}_n$ noudattavat Dirichlet-jakaumaa odotusarvolla $\underline{a}_n$ ja varianssilla $1/\delta$ ja niiden ehdollinen tiheysfunktio ehdolla Y on

$$p(\underline{\pi}_n|Y) = \Gamma(\delta) \prod_{j=1}^{n} \frac{\pi_j^{\delta/n-1}}{\Gamma(\delta/n)}.$$

On huomattavaa, että vaikka todennäköisyydet $\underline{\pi}_n$ riippuvat Y:stä, ei niiden jakauma, siis parametrit δ ja $\underline{a}_n$, riipu siitä mitenkään. Koska jakaumaoletus pätee kaikille n ja kaikille yksikkövälin jaoille $\underline{U}_n$, on $M_Y(Q(U))$ Dirichlet-prosessi. Sen avulla voidaan määritellä diskreetti approksimaatio kvantiilijakaumalle. Käytännössä asiantuntija-arviot muodostavat usein joukon kvantiilipisteitä, jotka määrittelevät kvantiilijakauman osittain. Käyttämällä edellä kuvattua muunnosta voidaan luokkatodennäköisyyksistä $\underline{\pi}_n$ johtaa kvantiilien ehdollinen yhteisjakauma ehdolla Y

$$p(\underline{q}_n|Y) = c[1 - M_Y(q_{n-1})]^{\delta/n-1} \times \prod_{j=1}^{n-1} [M_Y(q_j) - M_Y(q_{j-1})]^{\delta/n-1} m_Y(q_n)$$

kun $-\infty = q_0 < q_1 < ... < q_n = \infty$ ja vakio $c = \Gamma(\delta) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\delta/n)$. Tulos seuraa suoraan luokkatodennäköisyyksien määritelmästä, kun Jakobin muunnos on

$$\left| \frac{d\underline{\pi}_n}{d\underline{q}'_n} \right| = \prod_{j=1}^{n-1} m_Y(q_j),$$

joka on M_Y:n tiheysfunktioiden tulo. Gelfand et al. (1995) esittävät luokkatodennäköisyydet Beta-jakaumien sekoituksena, jotka estimoidaan Gibbs-otantaa käyttäen.

3.3 Usean asiantuntijan keskinäinen riippuvuus

Kirjallisuudessa on runsaasti menetelmiä, joilla asiantuntija-arviot yhdistetään ns. ryhmätodennäköisyyksiksi painottamalla eri tavoin yksittäisiä arvioita (esim. linear tai logarithmic opinion pool). Ongelmana on se, ettei ole mitään normatiivista tapaa määrittää painoja. Koska tässä työssä keskitytään bayesiläiseen informaation prosessointiin, ei tähän kirjallisuuteen (esim. Genest ja Zidak, 1986) kuitenkaan puututa syvällisemmin, sillä bayesiläisessä informaation prosessoinnissa Bayesin kaava toimii suoraan arvioiden yhdistämismenetelmänä. Usean asiantuntijan ongelma pelkistyy siihen, voidaanko arvioiden katsoa olevan toisistaan riippumattomia. Matemaattisesti on kyse todennäköisyysjakaumien yhteensovittamisesta (reconciliation).

Jos arviot ovat toisistaan riippumattomia, on niiden uskottavuusfunktio yksinkertaisesti tulo kaikkien k:n asiantuntijan uskottavuusfunktiosta eli $p(Q|Y_j, H) = \prod_i^k p_i(Q|Y_j, H)$ kuten toisistaan riippumattomien havaintojen tapauksessa. Useimmiten tämä on kuitenkin epärealistinen oletus jos asiantuntijat edustavat samaa alaa ja ovat vuorovaikutuksessa toistensa kanssa. Riippuvuuden analysoiminen voi kuitenkin jossain määrin selventää ongelmaa. Se syntyy epäilemättä pääasiassa yhteisistä tiedonlähteistä. Teoreettisesti on helppo yleistää riippumattomuus tilanteeseen, jossa asiantuntija-arviot ovat *ehdollisesti* riippumattomia, ehdolla yhteinen informaatio I

$$p(Q|Y_j, H) = \int \prod_i^k p_i(Q|Y_j, H, I) p(I|Y_j, H) dI.$$

Ehdollisesti riippumattomien asiantuntijoiden yhdistetty uskottavuusfunktio saadaan poistamalla riippuvuuden vaikutus eli integroimalla yli 'yhteisen informaation todennäköisyyden' kuten bayesiläisessä analyysissa yleensä on tapana laskettaessa marginaalisia todennäköisyyksiä. Yksittäisen päättelyketjun tapauksessa yhteinen informaatio I voisi tarkoittaa tietämystä ketjun aikaisempia osia mittaavien parametrien todennäköisyydestä. Käytännössä siis jakauman $p(I|Y_j, H)$ määrittely voisi olla hyvinkin monimutkainen malli ja vaatisi päätöksentekijältä ylimääräistä 'elicitointia'.

Bayesiläisessä informaation prosessoinnissa koko ajatus subjektiivisista ryhmätodennäköisyyksistä hylätään periaatteellisesti vääränä: subjektiiviset todennäköisyydet (beliefs) liittyvät aina yksilöön eikä niiden määrittely ryhmätasolla ole mielekästä (esim. French, 1985, O'Hagan, 1985). Yhdistelymenetelmien painotusongelmaa (pooling) ei kuitenkaan pystytä kiertämään: uskottavuusfunktio sisältää päätöksentekijän 'painon' eli arvion asiantuntijan harhaisuudesta (vrt. funktiot α_Y ja M_Y aikaisemmin). Lindley (1985) kuitenkin osoittaa, että erikoistapauksessa nämä 'painot' vastaavat yksittäisen asiantuntija-arvion riippumattoman informaation määrää Bayesin kaavan mukaisessa päivityksessä.

4 Kokemuksia ja esimerkkejä asiantuntijatiedon kvantifioinnista

Asiantuntija-arviointi on monivaiheinen prosessi, joka edellyttää huolellista teknistä suunnittelua, mutta myös sen tiedostamista, että on kyseessä sosiaalinen vuorovaikutustilanne. Tämä on erityisen selvää silloin kun asiantuntijoiden arviot poikkeavat huomattavasti toisistaan. Heiltä tulisikin voida edellyttää selkeitä perusteluja omalle näkemykselleen. Mitä huolellisemmin arvioitava ilmiö ja siihen liittyvät vaikutussuhteet pystytään jäsentämään, vaikkapa virtuaalisen mallin avulla, sitä helpompaa näiden perustelujen arviointi on.

Arvioinnin suunnittelijoiden tehtävänä on luoda olosuhteet, jotka helpottavat asiantuntijoita ilmaisemaan käsityksiään todennäköisyyksien avulla. Tämä edellyttää yleensä koulutusta ja 'lämmittelyä' yksinkertaisten todennäköisyysarviointien avulla. Mitä homogeenisempia asiantuntijat näiden valmiuksien suhteen ovat, sitä vähemmän eroja arvioissa syntyy muusta kuin siitä syystä, että he ovat aidosti eri mieltä ilmiön todennäköisyydestä ja pystyvät sen myös perustelemaan. Tähän samaan tavoitteeseen pyritään myös määrittelemällä arvioitavat suureet mahdollisimman yksikäsitteisesti ja siinä määrin kuin luotettavaa, tutkittua tietoa on olemassa, se toimitetaan kaikkien tiedoksi.

Philips (1998) ehdottaa, että arviointiprosessin tulisi sisältää ainakin seuraavat vaiheet:

1. Arviointitavoitteen esittely ja arvioijien koulutus: pyritään tekemään arvioijille tutuksi todennäköisyyslaskennan perusperiaatteet. Mainitaan mahdollisista virhelähteistä, joita todennäköisyyksiin perustuvat arviot usein sisältävät.

2. Ongelman rakenteen selvittäminen (strukturointi): pyritään määrittelemään arvioitavat tekijät käsitteellisesti siten, että ne ovat kaikille arvioijille ymmärrettäviä ja merkityksellisiä. Identifioidaan tekijät, joilla on vaikutusta ilmiön käyttäytymiseen ja ositetaan ne sellaisiksi oletuksiksi, joita voidaan vakioida erotuksena muihin epävarmuutta aiheuttaviin lähteisiin. Pyritään siihen, että arvioijat ovat yksimielisiä pääasiallisista vaikutussuhteista.

3. Arviointi: Muodostetaan skenaarioita, jotka voivat johtaa satunnaisilmiön äärimmäisiin arvoihin: mitkä tekijät vaikuttavat tällaisiin tilanteisiin ja kuinka todennäköisiä ne ovat?

Tarkistetaan arvioijien johdonmukaisuus (konsistenssi).

Konkreettisista arviointitilanteista on raportoitu runsaasti kirjallisuudessa (esim. Chaloner et al.,1993, Spiegelhalter et al., 1994, Kadane, 1994, O'Hagan, 1998, 2000). Seuraavassa esitetään joitakin yleispäteviksi havaittuja kokemuksia, joskin näyttää ilmeiseltä, että asiantuntijoiden tausta ja arvioitavan aiheen kompleksisuus vaikuttavat kokemuksiin varsin paljon. Kadane and Wolfson (2000) erottelevat *yleiset* arviointimenetelmät *erityismenetelmistä*, tarkoittaen sitä, että tietyn tilastollisen mallin (normaalinen lineaarinen malli, hasardimallit, varianssianalyysi) kehikkoon soveltuvat arvioinnit voidaan toteuttaa suurinpiirtein samalla tavoin riippumatta ongelmasta, kun taas tietystä sovelluksesta selvästi riippuvat arvioinnit ovat harvoin sovellettavissa muihin tilanteisiin. Yleisiin arviointimenetelmiin on kehitetty valmiita tietokoneohjelmia, jotka iteratiivisen kyselyprosessin avulla muodostavat asiantuntijan vastauksista ehdotusjakaumia esimerkiksi mallin parametreille, joita hän voi arvoida ja jopa itse muuttaa realistisemmaksi suoraan näyttöpäätteeltä (esim. Kadane and Wolfson, 1996, Chaloner, 1996). Tietokoneavusteisuus on osoittautunut tärkeäksi arviointiprosessin *iteratiivisuuden* takia. Iteratiivisuus tarkoittaa sitä, että asiantuntijan on voitava muuttaa käsityksiään ja näin oppia mahdollisista todennäköisyyksiä koskevista epäjohdonmukaisuuksistaan. Tietokone voi tässä tapauksessa olla hyvä opettaja.

Suunnitteluvaiheessa on osoittautunut hyödylliseksi laatia varsin tarkka kirjallinen kyselykaavake, joka vakioi kysymykset sellaiseen muotoon, että vastausten jatkokäsittely on mahdollisimman helppoa ja kysymykset ymmärretään yksikäsitteisesti. Tämä on välttämätöntä erityisesti jos asiantuntijoita on paljon. Mikäli aiheesta on tieteellistä kirjallisuutta saatavissa, tulisi kaikille asiantuntijoille tarjota systemaattinen kirjallisuusluettelo.

Kyselymenetelminä on käytetty sekä epäsuoraa että suoraa kyselyä. Epäsuorassa kyselyssä asiantuntijaa pyydetään vertaamaan tarkasteltavan ilmiön todennäköisyyttä jonkin referenssitapauksen todennäköisyyteen ('Kumpi on todennäköisempää: saada ruokamyrkytys eläinperäisistä elintarvikkeista vai sairastua influenssaan?'). Suorassa kyselyssä verrataan saman ilmiön kahden eri mahdollisuuden todennäköisyyttä ('Onko todennäköisempää, että infektio tarttuu lähteestä A kuin lähteestä B?'). Epäsuorasta kyselystä lienee hyötyä vain ilmiön yleisyyden alustavassa haarukoinnissa, koska asiantuntijoiden yleensä odotetaan tuntevan alansa niin hyvin, että tällaisten kysymysten tarpeellisuus on kyseenalaista. Suora kysely johtaa vertailumuodossa heikkoihin tulokseen, jotka koskevat vain epäyhtälöitä ja ovat vaikeasti prosessoitavissa mallien tarvittavaan muotoon.

Kyselyn kohdistaminen suoraan Y:n epävarmuusjakaumaan esimerkiksi kvantiilien avulla on osoittautunut tehokkaimmaksi ja toimivimmaksi tavaksi. Jakaumien parametrien kysely (esimerkiksi normaalijakauman tapauksessa odotusarvon ja varianssin) on osoittautunut hankalaksi, koska parametrit ovat abstrakteja, eivätkä välttämättä vastaa tapaa, jolla asiantuntija hahmottaa ongelman. Toisaalta yksinkertaisimpien parametristen jakaumien olettaminen rajoittaa asiantuntija-arvioiden vaihtelumahdollisuuksia. Kvantiilien avulla voidaan sen jälkeen arvioida myös jakauman keskittyneisyyttä ja hajontaa. Kadane ja Wolfson (2000) suosittelevat parametrien sijasta kysymään ennusteita tulevista arvoista (prediktiivisiä arvoja), koska ne ovat asiantuntijalle havaittavia ja siksi merkityksellisempiä.

Asiantuntijan koherenssin arvioimiseksi on esitetty lukuisia tapoja. Olennaista on tietysti, että vaihtoehtoisten tulosmahdollisuuksien on summauduttava yhteen ja että ilman lisäinformaatiota arvioijan mielestä vaihdettaville tulosvaihtoehdoille on annettava yhtä suuri tämän rajan sisällä.

3. Kun ylä- ja alarajat olivat yhteisesti sovittuja, pyydettiin arvioimaan välin muiden arvojen todennäköisyyttä seuraavien välien todennäköisyyksien avulla, jotka pystyttiin suoraan laskemaan kohtien 1 ja 2 perusteella:

a) (L, M)
b) $(L, (L+M)/2)$
c) $((M+U)/2, U)$
d) $(L, (L+3M)/4)$
e) $((3M+U)/4, U)$

Näitä luokkatodennäköisyyksiä merkittiin $p_1, p_2, ..., p_5$. Kysymisjärjestys oli tarkoituksellinen ja sillä pyrittiin ankkuroinnin välttämiseen. Kyseisten välien tarkoituksena oli myös haarukoida sitä, missä pääasiallinen osa jakauman todennäköisyydestä sijaitsee. Näin syntyneitä todennäköisyyksiä käytettiin seuraavien, jakauman muotoa kuvaavien todennäköisyyksien laskemiseen:

$$q_1 = P(L \leq X \leq \frac{L+M}{2}) = p_2$$
$$q_2 = P(\frac{L+M}{2} \leq X \leq \frac{L+3M}{4}) = p_4 - p_2$$
$$q_3 = P(\frac{L+3M}{4} \leq X \leq M) = p_1 - p_4$$
$$q_4 = P(M \leq X \leq \frac{3M+U}{4}) = 1 - p_1 - p_2$$
$$q_5 = P(\frac{3M+U}{4} \leq X \leq \frac{M+U}{2}) = p_5 - p_3$$
$$q_6 = P(\frac{M+U}{2} \leq X \leq U) = p_3$$

4. Näin saaduista todennäköisyyksistä piirrettiin histogrammi, jonka todenmukaisuutta pyydettiin arvioimaan. Jotta jakauman muoto tulisi selvemmin esille, sovitettiin histogrammiin Beta-jakauma, jonka arvoalue on välillä (L, U) ja moodi M.

5. Asiantuntijoita pyydettiin nyt uudelleen arvioimaan ylä- ja alarajoja L ja U. Tällä proseduurilla pyrittiin siirtämään alkuperäisiä rajoja kolmen keskihajonnan verran moodista, kuitenkin niin, että alkuperäinen suhde etäisyyksiin $M - L$ ja $U - M$ (eli jakauman muoto) säilyy.

$$\text{uusi } L = min[\frac{L+M}{2}, M - F(M-L)]$$
$$\text{uusi } U = min[\frac{M+U}{2}, M + F(U-M)]$$

jossa

$$F = \frac{3S}{min(M - L, U - M)}$$

Uusien ylä- ja alarajojen mukaista Beta-jakaumaa pyydettiin jälleen arvioimaan ja näin jatkettiin, kunnes tulos tyydytti kaikkia.

Todellisessa arviointitilanteessa maantieteellinen alue, jolla hydraulista johtavuutta tutkittiin, jaettiin blokkeihin X_i, joiden arveltiin olevan sisäisesti samankaltaisia. Tehtävänä oli siis arvioida näiden blokkien yhteisjakauma. Tulosten sovittamisessa käytettiin varianssianalyysin keinoja vertailtaessa koko alueen keskimääräistä johtavuutta blokkien väliseen keskimääräiseen hydrauliseen johtavuuteen.

Esimerkki kuvaa moniulotteista arviointiongelmaa, jossa lopputulos syntyy usean eri alan asiantuntijan arviosta. O'Hagan päätyi työssä siihen, ettei mitään mekaanisia menetelmiä arvioiden yhdistämisessä tulisi käyttää vaan lopputuloksen tulisi syntyä yhteisen pohdiskelun ja keskustelun tuloksena ns. konsensuspäätöksenä. Tämä johtopäätös tukee myös edellisen esimerkin (kliininen koe) tulosta. Arviointitilanne tulee siis myös nähdä sosiaalisena tilanteena, jossa arvioijilla on paitsi mahdollisuus myös velvollisuus perustella omat käsityksensä siten, että ne ovat heidän kollegojensa hyväksyttävissä.

5 Yhteenveto

Tässä työssä on esitelty joukko ongelmia, joita asiantuntija-arvioiden käyttöön saattaa liittyä ja keinoja, joilla näitä harhan lähteitä voitaisiin vähentää. On tunnettua, että ihmiset eivät ole hyviä arvioimaan todennäköisyyksiä ja ovat päätelmissään epäjohdonmukaisia. Edellä kuvatut harhan lähteet ja raportoidut kokemukset arviointiprosesseista eivät ole kovin rohkaisevia. Mikäli mitattua tietoa ei ole, ei riskinarvioinnissa kuitenkaan ole muita vaihtoehtoja. On muitakin aloja, joissa ihminen toimii 'dataa' tuottavana instrumenttina (mm. aistinvarainen arviointi). Näillä aloilla tunnustetaan ihmisen puutteellinen kyky tuottaa täysin johdonmukaista ja luotettavaa tietoa pitkällä aikavälillä ja myös ihmisten erilaisuus tässä suhteessa. Toisaalta tiedetään, että systemaattisen koulutuksen avulla harhan lähteitä voidaan vähentää ja ihmiset myös oppivat toimimaan johdonmukaisemmin omissa arvioissaan.

Työssä osoitettiin myös, että on olemassa normatiivisia menetelmiä, joiden avulla asiantuntija-arvioita voidaan käsitellä informaationa kuten mitä tahansa mitattua tietoa. Nämä menetelmät eivät kuitenkaan tarjoa valmiita laskukaavoja vaan päätöksentekijä joutuu, tavalla tai toisella, ottamaan kantaa asiantuntija-arvioiden luotettavuuteen. Teoreettisesti yksinkertaisimmassa tilanteessa kukin asiantuntija antaa oman riippumattoman arvionsa. Kuten havaittiin, bayesiläisessä informaation prosessoinnissa juuri arvioiden riippuvuus aiheuttaa hankaluuksia informaation päivityksessä. Syynä ei kuitenkaan ole pelkästään matemaattinen yksinkertaisuus. Ns. Delfi-tekniikassa pyritään myös välttämään asiantuntijoiden avointa interaktiota. Sen sijaan kukin asiantuntija saa palautetta muiden arvioista vain yhteenlaskettujen tunnuslukujen kautta ja voi näin päivittää omaa käsitystään. Avoimen interaktion katsotaan usein vähentävän todellisen informaation määrää ja ilmiöön liittyvää aitoa epävarmuutta pyrittäessä konsensus-ratkaisuun. Asiantuntijoilla saattaa myös olla arvioitavaan ilmiöön liittyviä erilaisia utiliteetteja, jotka vaikuttavat konsensuspäätöksiin. Tässä työssä esitellyt tapausselostukset toisaalta korostivat asiantuntijoiden avoimen interaktioon liittyviä synergiaetuja. Arvioinnin suunnittelijalla onkin ilmeisen tärkeä rooli pyrittäessä löytämään eri tilanteisiin soveltuva ratkaisu.

Kirjallisuutta:

Berry, D.A., Stangl, D.K. (1996) "Bayesian Methods in Health-Related Research" In *Bayesian Biostatistics* (eds. Berry, R.A and Stangl, D.K), 3-65.

Chaloner, K. (1996) "Elicitation of Prior Distributions". In *Bayesian Biostatistics* (eds. Berry, R.A and Stangl, D.K), 141-156.

Freedman, L. S., and D. J. Spiegelhalter (1983) "The Assessment of Subjective Opinion and Its Use in Relation to Stopping Rules for Clinical Trials". *The Statistician*, 32, 153-160.

Garthwrite, P., O'Hagan, A (2000) "Quantifying Expert Opinion in the Water Industry: an Experimental Study". *The Statistician*, 49, 455-477.

Gelfand A, Mallick B, Dey D (1995) "Modeling Expert Opinion Arising as a Partial Probabilistic Specification", *Journal of the American Statistical Association*, 90, 598-604.

Genest C, Schervish M (1985), "Modeling Expert Judgements for Bayesian Updating". *Annals of Statistics*, 13, 1198-1212.

Genest, C., Zidak (1986) "Combining Probability Distributions: a Critique and an Annotated Bibliography", *Statistical Science*,1, 114-148.

Hogarth, R.M. (1988) "*Judgement and Choice*" (2nd ed.) Wiley, New York.

Chatterjee S. and S. (1987) "On Combining Expert Opinions". *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 7, 271-295.

French, S. (1981) "Consensus of Opinions", *European Journal of Operations Research*, 7, 332-340.

French, S. (1985) "Group Consensus Probability Distributions: A Critical Survey" in *Bayesian Statistics* 2, 183-201.

Kadane, J.B., and L.J. Wolfson (1996) "Priors for the Design and Analysis of Clinical Trials". In *Bayesian Biostatistics* (eds. Berry, R.A and Stangl, D.K), 157-184.

Kadane, J.B., and L.J. Wolfson (1998) "Experiences in Elicitation". The Statistician, 47(1), 3-19.

Lindley D. (1983) "Reconciliation of Probability Distributions". *Operations Research*, 31, 866-880.

Lindley, D. (1998) Discussion on the papers on 'Elicitation'. *The Statistician*, 47(1), 56-57.

Morris, P. A. (1974) "Decision Analysis Expert Use". *Management Science*, 20, 1233-1241.

O'Hagan, A. (1998) "Eliciting Expert Beliefs in Substantial Practical Applications" (with discussion). *The Statistician*, 47, 21-35.

Philips, L. (1998) Discussion on the papers on 'Elicitation'. *The Statistician*, 47(1), 55-56.

Spiegelhalter, D., Myles, J., Jones, D., Abrams, K. (2000) "Bayesian Methods in Health Technology Asssessment: a Review". Health Technology Assessment 2000, Vol 4: No.38.

Tversky, A. (1974) "Assessing Uncertainty" (with discussion). *Journal of The Royal Statistical Society Series B*, 36, 148-159.

West M. (1988) "Modelling Expert Opinion" in *Bayesian Statistics 3*, 493-508.

Winkler, R. L. (1968) "The Consensus of Subjective Probability Distributions". *Management Science*, 27, 479-488.

Eläinlääkintä- ja elintarviketutkimuslaitos (EELA)
Käyntiosoite PL 45 (Hämeentie 57)
Postiosoite 00581 Helsinki
Puhelin Puh. (09) 393 101
Telekopio Fax (09) 393 1811
Sähköposti etunimi.sukunimi@eela.fi
tiedotus@eela.fi

Helsinki 2001